Θεώρημα Rolle

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
Πολλαπλή εφαρμογή θεωρήματος Rolle

1. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=f(2)=f(3)$

Να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε : $f'(x_1)=f'(x_2)$

β) υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο , ώστε $f''(\xi)=0$

Λύση

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$ σαν παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(1,2)$ και $(2,3)$ σαν παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- $f(1)=f(2)$ και $f(2)=f(3)$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $f(x)$ στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$ υπάρχουν $x_1\in(1,2)$ και $x_2\in(2,3)$ τέτοια , ώστε :

  $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$

- Η $f'(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ σαν δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2) σαν δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $f'(x)$ στο διάστημα $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(1,3)$ τέτοιο , ώστε $f''(\xi)=0$

  Άρα υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο , ώστε $f''(\xi)=0$

2. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(2)=f(4)=f(6)$

Να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε : $f'(x_1)=f'(x_2)$

β) υπάρχει $\xi\in(2,6)$ τέτοιο , ώστε $f''(\xi)=0$

Λύση

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[2,4]$ και $[4,6]$ σαν παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(2,4)$ και $(4,6)$ σαν παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- $f(2)=f(4)$ και $f(4)=f(6)$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $f(x)$ στα διαστήματα $[2,4]$ και $[4,6]$ υπάρχουν $x_1 \in (2,4)$ και $x_2 \in (4,6)$ τέτοια , ώστε :

  $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$

- Η $f'(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ σαν δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2) σαν δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $f'(x)$ στο διάστημα $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2) \subseteq (2,6)$ τέτοιο , ώστε $f''(\xi)=0$

  Άρα υπάρχει $\xi \in (2,6)$ τέτοιο , ώστε $f''(\xi)=0$

3. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)^2$

Να βρείτε το πλήθος των ριζών του πολυωνύμου $g(x)$ με\

$g(x)=(x-2)(x-3)^2+(x-1)(x-3)^2+2(x-1)(x-2)(x-3)$

Λύση

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$ σαν πολυωνυμική
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(1,2)$ και $(2,3)$ σαν πολυωνυμική με $f'(x)=g(x)$
- $f(1)=f(2)=0$ και $f(2)=f(3)=0$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $f(x)$ στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$ υπάρχουν $x_1 \in (1,2)$ και $x_2 \in (2,3)$ τέτοια , ώστε :

  $f'(x_1)=0 \Leftrightarrow g(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0 \Leftrightarrow g(x_2)=0$

  Άρα η $g(x)=0$ έχει δυο ρίζες , τις x_1 και x_2

Επίσης $g(3)=0$ Άρα η $g(x)=0$ έχει ρίζα και το $x=3$
Αφού το πολυώνυμο $g(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού και οι αριθμοί $x_1,\ x_2,\ 3$ είναι ρίζες, άρα το πολυώνυμο $g(x)$ έχει τρείς ακριβώς ρίζες.

4. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=1$, $f(2)=4-\ln 2$, $f(e)=e^2-1$
Να εφαρμόσετε το θεώρημα Rolle για την συνάρτηση $g(x)=f(x)+\ln x-x^2$ στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,e]$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=2+\dfrac{1}{\xi^2}$

Λύση

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,e]$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(1,2)$ και $(2,e)$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)+\dfrac{1}{x}-2x$
- $g(1)=g(2)=0$ και $g(2)=g(e)=0$
  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,e]$ υπάρχουν $x_1\in(1,2)$ και $x_2\in(2,e)$ τέτοια, ώστε:
  $g'(x_1)=0$ και $g'(x_2)=0$

- Η $g'(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ αφού η $f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2) αφού η $f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- $g'(x_1)=g'(x_2)=0$
  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g'(x)$ στο διάστημα $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(1,e)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi)=0$
  Άρα υπάρχει $\xi\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε:
  $$g''(\xi)=0\Leftrightarrow f''(\xi)-\frac{1}{\xi^2}-2=0\Leftrightarrow f''(\xi)=\frac{1}{\xi^2}+2$$

5. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=2$, $f(2)=\ln 2+3$, $f(3)=\ln 3+4$
Να εφαρμόσετε το θεώρημα Rolle για την συνάρτηση $g(x)=f(x)-\ln x-x$ στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο , ώστε $\xi^2 f''(\xi)=-1$

Λύση

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(1,2)$ και $(2,3)$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{x}-1$
- $g(1)=g(2)=1$ και $g(2)=g(3)=1$

 Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$ υπάρχουν $x_1\in(1,2)$ και $x_2\in(2,3)$ τέτοια , ώστε :

 $g'(x_1)=0$ και $g'(x_2)=0$

- Η $g'(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ αφού η $f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2) αφού η $f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- $g'(x_1)=g'(x_2)=0$

 Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g'(x)$ στο διάστημα $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(1,3)$ τέτοιο , ώστε $g''(\xi)=0$

 Άρα υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο , ώστε $g''(\xi)=0\Leftrightarrow$

$$f''(\xi)-\frac{1}{\xi^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\xi^2 f''(\xi)=-1$$

6. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, $f(\frac{\pi}{2})=\frac{8-\pi^2}{4}$, $f(\pi)=3-\pi^2$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο , ώστε $f''(\xi)=\sigma\upsilon\nu\xi-2$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+\sigma\upsilon\nu x+x^2$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-\eta\mu x+2x$
- $g(0)=g(\frac{\pi}{2})=2$ και $g(\frac{\pi}{2})=g(\pi)=2$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ υπάρχουν $x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $x_2\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ τέτοια , ώστε :

  $g'(x_1)=0$ και $g'(x_2)=0$

- Η $g'(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ αφού η $f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2) αφού η $f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- $g'(x_1)=g'(x_2)=0$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g'(x)$ στο διάστημα $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(0,\pi)$ τέτοιο , ώστε $g''(\xi)=0$

  Άρα υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο , ώστε $g''(\xi)=0\Leftrightarrow$

$$f''(\xi)-\sigma\upsilon\nu\xi+2=0\Leftrightarrow$$

$$f''(\xi)=\sigma\upsilon\nu\xi-2$$

7. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη
με $f(\alpha)=\ln\alpha$, $f(\beta)=\ln\beta$, $f(\gamma)=-\ln\gamma$ όπου $0<\alpha<\beta<\gamma$
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο , ώστε:

$$f(\xi)f''(\xi)+\left(f'(\xi)\right)^2=\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln^2 x$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα (α,β) και (β,γ) σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=2f(x)f'(x)-2\dfrac{\ln x}{x}$
- $g(\alpha)=g(\beta)=0$ και $g(\beta)=g(\gamma)=0$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$ υπάρχουν $x_1\in(\alpha,\beta)$ και $x_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοια , ώστε :

  $g'(x_1)=0$ και $g'(x_2)=0$

- Η $g'(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ αφού η $f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2) αφού η $f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- $g'(x_1)=g'(x_2)=0$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g'(x)$ στο διάστημα $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(\alpha,\gamma)$ τέτοιο , ώστε $g''(\xi)=0$

  Άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο , ώστε $g''(\xi)=0\Leftrightarrow$

$$2\left(f'(\xi)\right)^2+2f(\xi)f''(\xi)-2\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(f'(\xi)\right)^2+f(\xi)f''(\xi)-\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(f'(\xi)\right)^2+f(\xi)f''(\xi)=\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}$$

8. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=f(1)-1=f(2)-2$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο , ώστε $f''(\xi)=0$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,2)$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-1$
- $g(0)=g(1)$ και $g(1)=g(2)$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$ υπάρχουν $x_1\in(0,1)$ και $x_2\in(1,2)$ τέτοια , ώστε :

  $g'(x_1)=0$ και $g'(x_2)=0$

- Η $g'(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ αφού η $f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2) αφού η $f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- $g'(x_1)=g'(x_2)=0$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g'(x)$ στο διάστημα $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(0,2)$ τέτοιο , ώστε $g''(\xi)=0$

  Άρα υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο , ώστε $g''(\xi)=0\Leftrightarrow f''(x)=0$

Rolle σε βοηθητική συνάρτηση

1. Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)-f(\beta)=\alpha^3-\beta^3$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=3\xi^2$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^3$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ σαν διαφορά μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) σαν διαφορά μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$ με $g'(x)=f'(x)-3x^2$
- $g(\alpha)=g(\beta)$ γιατί $f(\alpha)-f(\beta)=\alpha^3-\beta^3 \Leftrightarrow f(\alpha)-\alpha^3=f(\beta)-\beta^3$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

  $$g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-3\xi^2=0\Leftrightarrow f'(\xi)=3\xi^2$$

2. Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f^2(\alpha)-f^2(\beta)=\alpha^2-\beta^2$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)f(\xi)=\xi$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-x^2$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ σαν διαφορά μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) σαν διαφορά μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (α,β) με $g'(x)=2f(x)f'(x)-2x$
- $g(\alpha)=g(\beta)$ γιατί

  $f^2(\alpha)-f^2(\beta)=\alpha^2-\beta^2 \Leftrightarrow f^2(\alpha)-\alpha^2=f^2(\beta)-\beta^2$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

  $$g'(\xi)=0\Leftrightarrow 2f(\xi)f'(\xi)-2\xi=0\Leftrightarrow f(\xi)f'(\xi)=\xi$$

3. Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f(2)=2f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο , ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$ σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων στο $[1,2]$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,2)$ σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1,2)$ με $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$
- $g(1)=g(2)$ γιατί $f(2)=2f(1)\Leftrightarrow\dfrac{f(1)}{1}=\dfrac{f(2)}{2}$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $[1,2]$ υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο , ώστε :

  $$g'(\xi)=0\Leftrightarrow\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0\Leftrightarrow\xi f'(\xi)-f(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}$$

4. Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ με : $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο , ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\varepsilon\varphi\xi$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

με $g'(x)=-\eta\mu x\cdot f(x)+f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$

- $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\cdot f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0\cdot f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$

  $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

  Άρα $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

- οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ υπάρχει $\xi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο , ώστε :

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$
$$-\eta\mu\xi\cdot f(\xi)+f'(\xi)\cdot\sigma\upsilon\nu\xi=0\Leftrightarrow$$
$$\eta\mu\xi\cdot f(\xi)=f'(\xi)\cdot\sigma\upsilon\nu\xi\Leftrightarrow$$
$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{\eta\mu\xi}{\sigma\upsilon\nu\xi}$$
$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\varepsilon\varphi\xi$$

5. Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο , ώστε $f'(\xi)=\frac{2\xi f(\xi)}{1-\xi^2}$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\left(x^2-1\right)f\left(x\right)$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ σαν διαφορά μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, αφού $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$ σαν διαφορά μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=2xf(x)+\left(x^2-1\right)f'(x)$
- $g(-1)=g(1)=0$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $[-1,1]$ υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο , ώστε :

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow 2\xi f(\xi)+\left(\xi^2-1\right)f'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{2\xi f(\xi)}{1-\xi^2}$$

6. Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με : $f(0)=0$ και $f(1)=1$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο , ώστε $f'(\xi)=\dfrac{2}{1+3f^2(\xi)}$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f^3(x)+f(x)-2x$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,1)$ με $g'(x)=3f^2(x)f'(x)+f'(x)-2$
- $g(0)=g(1)=0$ γιατί $g(0)=f^3(0)+f(0)-2\cdot 0=0+0-0=0$ και $g(1)=f^3(1)+f(1)-2\cdot 1=1+1-2=0$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $[0,1]$ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο , ώστε :

$$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow$$
$$3f^2(\xi)f'(\xi)+f'(\xi)-2=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(3f^2(\xi)+1\right)f'(\xi)=2 \Leftrightarrow$$
$$f'(\xi)=\frac{2}{3f^2(\xi)+1}$$

7. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ Αν $\dfrac{f(2017)}{f(2016)}=e$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον , ρίζα στο διάστημα $(2016,2017)$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot e^{-x}$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[2016,2017]$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $[2016,2017]$

- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2016,2017)$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(2016,2017)$ με $g'(x)=f'(x)\cdot e^{-x}-f(x)\cdot e^{-x}=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)$
- $g(2016)=g(2017)$

  γιατί $g(2016)=f\left(2016\right)\cdot e^{-2016}$

  και

  $g(2017)=f\left(2017\right)\cdot e^{-2017}=e\cdot f\left(2016\right)\cdot e^{-2017}=f\left(2016\right)\cdot e^{-2016}$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $\left[2016,2017\right]$ υπάρχει $\xi\in\left(2016,2017\right)$ τέτοιο , ώστε :

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$
$$e^{-\xi}\left(f'(\xi)-f(\xi)\right)=0\Leftrightarrow$$
$$f'(\xi)-f(\xi)=0\Leftrightarrow$$
$$f'(\xi)=f(\xi)$$

Άρα η εξίσωση $f'(x)=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον , ρίζα $\xi\in\left(2016,2017\right)$

8. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[2016,2017\right]$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $\dfrac{f(2016)}{2016}=\dfrac{f(2017)}{2017}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x)=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον , ρίζα στο διάστημα $\left(2016,2017\right)$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f\left(x\right)}{x}$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[2016,2017\right]$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $\left[2016,2017\right]$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(2016,2017\right)$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(2016,2017\right)$ με $g'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$
- $g(2016)=g(2017)$

  γιατί $g(2016)=\dfrac{f\left(2016\right)}{2016}$

και $g(2017)=\dfrac{f\left(2017\right)}{2017}=\dfrac{f\left(2016\right)}{2016}$

Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $\left[2016,2017\right]$ υπάρχει $\xi\in\left(2016,2017\right)$ τέτοιο , ώστε :

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)\cdot\xi-f(\xi)\cdot 1}{\xi^2}=0\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)\cdot\xi-f(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$\xi\cdot f'(\xi)=f(\xi)$$

Άρα η εξίσωση $x\cdot f'(x)=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον , ρίζα την $\xi\in\left(2016,2017\right)$

9. Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $\left[1,e\right]$ και παραγωγίσιμη στο (1,e) με $f(e)-f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(1,e\right)$ τέτοιο , ώστε $\xi f'(\xi)=1$

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f\left(x\right)-\ln x$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1,e\right]$ σαν διαφορά μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $\left[1,e\right]$.
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (1,e) σαν διαφορά μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (1,e) με $g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{x}$
- $g(1)=g(e)$
  γιατί $g(1)=f(1)-\ln 1=f(1)$
  και $g(e)=f(e)-\ln e=f(e)-1=f(1)$
  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $\left[1,e\right]$ υπάρχει $\xi\in(1,e)$ τέτοιο , ώστε :

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-\frac{1}{\xi}=0\Leftrightarrow \xi f'(\xi)=1$$

10. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)=f'(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο , ώστε $f(\xi)f''(\xi)=-\left[f'(\xi)\right]^2$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$.
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (α,β) με $g'(x)=f''(x)\cdot f(x)+f'(x)\cdot f'(x)$
- $g(\alpha)=g(\beta)=0$
  γιατί $g(\alpha)=f'(\alpha)\cdot f(\alpha)=f'(\alpha)\cdot 0=0$
  και $g(\beta)=f'(\beta)\cdot f(\beta)=0\cdot f(\beta)=0$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο , ώστε :

$$g'(\xi)=0$$
$$f''(\xi)\cdot f(\xi)+f'(\xi)\cdot f'(\xi)=0\Leftrightarrow$$
$$f''(\xi)\cdot f(\xi)=-\left[f'(\xi)\right]^2$$

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x),g(x)$ συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $g(x)g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)g(\beta)=f(\beta)g(\alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο , ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

- Η $h(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$.
- Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (α,β)

με $h^{'}(x)=\dfrac{f^{'}(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g^{'}(x)}{\left[g(x)\right]^{2}}$

- $h(\alpha)=h(\beta)$

  γιατί $h(a)=\dfrac{f\left(a\right)}{g\left(a\right)}$, $h(\beta)=\dfrac{f\left(\beta\right)}{g\left(\beta\right)}$

  και $f(\alpha)g(\beta)=f(\beta)g(\alpha)\Leftrightarrow\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}$

  Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $h(x)$ στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο , ώστε :

$$h^{'}(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{f^{'}(\xi)\cdot g(\xi)-f(\xi)\cdot g^{'}(\xi)}{\left[g(\xi)\right]^{2}}=0\Leftrightarrow$$

$$f^{'}(\xi)\cdot g(\xi)-f(\xi)\cdot g^{'}(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$f^{'}(\xi)\cdot g(\xi)=f(\xi)\cdot g^{'}(\xi)\Leftrightarrow$$

$$f^{'}(\xi)\cdot g(\xi)=f(\xi)\cdot g^{'}(\xi)\Leftrightarrow$$

$$\frac{f^{'}(\xi)\cdot g(\xi)}{g(\xi)\cdot g^{'}(\xi)}=\frac{f(\xi)\cdot g^{'}(\xi)}{g(\xi)\cdot g^{'}(\xi)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x),g(x)$ συνεχείς στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha,\beta\right)$ με $f(x)g(x)\neq0$ για κάθε $x\in\left(\alpha,\beta\right)$ και $f(\alpha)=g(\beta)$ **,** $f(\beta)=g(\alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο, ώστε : $\dfrac{f^{'}(\xi)}{f(\xi)}+\dfrac{g^{'}(\xi)}{g(\xi)}=0$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)$

- Η $h(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο $\left[\alpha,\beta\right]$.
- Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\alpha,\beta\right)$ σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(\alpha,\beta\right)$ με $h^{'}(x)=f^{'}(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g^{'}(x)$
- $h(\alpha)=h(\beta)$

γιατί $h(a) = f(a)g(a) = g(\beta)\cdot f(\beta)$, $h(\beta) = f(\beta)\cdot g(\beta)$

Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $h(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο , ώστε :

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)\cdot g(\xi) + f(\xi)\cdot g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)\cdot g(\xi)}{f(\xi)\cdot g(\xi)} + \frac{f(\xi)\cdot g'(\xi)}{f(\xi)\cdot g(\xi)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$$

13. Έστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$ και $\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}$**.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο , ώστε $f'(\xi)\cdot \varepsilon\varphi\xi + f(\xi) = 0$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x\cdot f(x)$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (α,β) με $g'(x) = \sigma\upsilon\nu x\cdot f(x) + f'(x)\cdot\eta\mu x$
- $g(\alpha) = \eta\mu\alpha\cdot f(\alpha) = \eta\mu\alpha\cdot\beta$

  $g(\beta) = \eta\mu\beta\cdot f(\beta) = \eta\mu\beta\cdot\alpha$

  αλλά $\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\cdot\eta\mu\beta = \beta\cdot\eta\mu\alpha$

  Άρα $g(\alpha) = g(\beta)$
- οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο , ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\xi\cdot f(\xi) + f'(\xi)\cdot\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow$$

Αφού το $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ το $\sigma\upsilon\nu\xi \neq 0$ οπότε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\xi \cdot f(\xi)}{\sigma\upsilon\nu\xi} + \frac{f'(\xi) \cdot \eta\mu\xi}{\sigma\upsilon\nu\xi} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) + f'(\xi) \cdot \varepsilon\varphi\xi = 0$$

Τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (α,β)

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\lambda x^2 + 2\mu x = \lambda + \mu$ έχει μια τουλάχιστον , ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \lambda x^3 + \mu x^2 - (\lambda + \mu)x$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ σαν πολυωνυμική
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ σαν πολυωνυμική με $g'(x) = 3\lambda x^2 + 2\mu x - \lambda - \mu$
- $g(0) = \lambda \cdot 0^3 + \mu \cdot 0^2 - (\lambda + \mu) \cdot 0 = 0$
  $g(1) = \lambda \cdot 1^3 + \mu \cdot 1^2 - (\lambda + \mu) \cdot 1 = \lambda + \mu - \lambda - \mu = 0$
  Άρα $g(0) = g(1) = 0$
- οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $[0,1]$ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο , ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$
$$3\lambda \xi^2 + 2\mu \xi - \lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow$$
$$3\lambda \xi^2 + 2\mu \xi = \lambda + \mu$$

2. Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f(2) - f(1) = 3$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον , ρίζα στο διάστημα $(1,2)$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[1,2]$
  Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ σαν διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $(1,2)$
  με $g'(x) = f'(x) - 2x$
- $g(1) = f(1) - 1$
  $g(2) = f(2) - 2^2 = f(1) + 3 - 4 = f(1) - 1$
  Άρα $g(1) = g(2)$
- οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $[1,2]$ υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο , ώστε :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f^{'}(\xi)-2\xi=0 \Leftrightarrow$$
$$f^{'}(\xi)=2\xi$$

Άρα η εξίσωση $f^{'}(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον , ρίζα ,την ξ ,στο διάστημα $\left(1,2\right)$

Το πολύ μια ρίζα στο διάστημα (α,β)

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+4x+\lambda=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $(2,3)$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+4x+\lambda$

Έστω η εξίσωση $\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+4x+\lambda=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ έχει δυο ρίζες $x_1,x_2\in(2,3)$

Τότε $f(x_1)=0$ και $f(x_2)=0$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ σαν πολυωνυμική
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2) με $f'(x)=x^2-5x+4$
- $f(x_1)=f(x_2)=0$

οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $f(x)$ στο διάστημα $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο , ώστε :

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow$$
$$\xi^2-5\xi+4=0\Leftrightarrow$$
$$\xi=1 \text{ ή } \xi=4 \text{ άτοπο γιατί } \xi\in(x_1,x_2)\subseteq(2,3)$$

Άρα η εξίσωση $\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+4x+\lambda=0\Leftrightarrow f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(2,3)$

2. Αν $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f^2(x)+e^{f(x)}+f(x)=x^3+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια, ρίζα στο $\mathbb{R}$

Λύση

Έστω η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο ρίζες $x_1,x_2\in\mathbb{R}$

Τότε $f(x_1)=0$ και $f(x_2)=0$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[x_1,x_2\right]$ σαν παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(x_1,x_2\right)$
- $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$

οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $f(x)$ στο διάστημα $\left[x_1,x_2\right]$ υπάρχει $\xi\in\left(x_1,x_2\right)$ τέτοιο , ώστε :

$$f^{'}(\xi)=0$$

Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση έχουμε:

$2f(x)\cdot f^{'}(x)+e^{f(x)}\cdot f^{'}(x)+f^{'}(x)=3x^2+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για x=ξ έχουμε : $2f(\xi)\cdot f^{'}(\xi)+e^{f(\xi)}\cdot f^{'}(\xi)+f^{'}(\xi)=3\xi^2+1\Leftrightarrow$

$$2f(\xi)\cdot 0+e^{f(\xi)}\cdot 0+0=3\xi^2+1\Leftrightarrow$$

$$3\xi^2+1=0\Leftrightarrow$$

$$\xi^2=-\frac{1}{2} \text{ άτοπο}$$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια, ρίζα στο $\mathbb{R}$

3. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπους $f(x)=e^{2x}+x-e$ και $g(x)=2^{-x}-3x+1$. Να αποδείξετε ότι οι C_f,C_g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο .

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$

$$=e^{2x}+x-e-2^{-x}+3x-1$$

$$=e^{2x}-2^{-x}+4x-e-1$$

Έστω η εξίσωση $h(x)=0$ έχει δυο ρίζες $x_1,x_2\in\mathbb{R}$

Τότε $h\left(x_1\right)=0$ και $h\left(x_2\right)=0$

- Η $h(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[x_1,x_2\right]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $\left[x_1,x_2\right]$.
- Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(x_1,x_2\right)$ σαν διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(x_1,x_2\right)$ με $h^{'}(x)=2e^{2x}+2^{-x}+4$
- $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$

οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $h(x)$ στο διάστημα $\left[x_1,x_2\right]$ υπάρχει $\xi\in\left(x_1,x_2\right)$ τέτοιο , ώστε :

$$h^{'}(\xi)=0 \Leftrightarrow$$
$$2e^{2\xi}+2^{-\xi}+4=0 \Leftrightarrow$$
$$2e^{2\xi}+\frac{1}{2^{\xi}}+4=0 \text{ άτοπο γιατί}$$
$$2e^{2\xi}+\frac{1}{2^{\xi}}+4>0 \text{ για κάθε } \xi\in\mathbb{R}$$

Άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$
Οπότε οι C_f, C_g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο .

4. Έστω οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπους $f(x)=x^6-\alpha x$ και $g(x)=\beta-x^2$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν το πολύ δυο κοινά σημεία .

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$
$$=x^6+x^2-ax-\beta$$
Έστω η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τρείς ρίζες $x_1, x_2, x_3\in\mathbb{R}$
Τότε $h(x_1)=0$ και $h(x_2)=0$ και $h(x_3)=0$

- Η $h(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ σαν πολυωνυμική
- Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2) σαν πολυωνυμική με $h^{'}(x)=6x^5+2x-\alpha$
- $h(x_1)=h(x_2)=0$

οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $h(x)$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει $\xi_1\in(x_1, x_2)$ τέτοιο , ώστε :
$$h^{'}(\xi_1)=0$$

- Η $h(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_2, x_3]$ σαν πολυωνυμική
- Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_2, x_3) σαν πολυωνυμική με $h^{'}(x)=6x^5+2x-\alpha$
- $h(x_2)=h(x_3)=0$

οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $h(x)$ στο διάστημα $[x_2, x_3]$ υπάρχει $\xi_2\in(x_2, x_3)$ τέτοιο , ώστε :
$$h^{'}(\xi_2)=0$$

- Η $h^{'}(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ σαν πολυωνυμική
- Η $h^{'}(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (ξ_1, ξ_2)

σαν πολυωνυμική με $h''(x)=30x^4+2$

- $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$

οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $h'(x)$ στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ υπάρχει $x_0\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο , ώστε :

$$h''(x_0)=0$$

$$30x_0^4+2=0$$

$$x_0^4=-\frac{1}{15} \quad \text{άτοπο γιατί}$$

$$x_0^4\geq 0 \quad \text{για κάθε } x_0\in\mathbb{R}$$

Άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει το πολύ δυο ρίζες στο $\mathbb{R}$

Οπότε οι C_f,C_g έχουν το πολύ δυο κοινά σημεία .

ΓΕΝΙΚΕΣ

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ \alpha & , \quad x=0 \end{cases}$

i) Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0=0$

ii) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$

iii) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\left(0,\dfrac{1}{\pi}\right)$

Λύση

$$f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & \text{αν } x\neq 0 \\ \alpha & \text{αν x=0} \end{cases} \qquad x_0=0$$

i) Για κάθε $x\neq 0$ η $f(x)=x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων

Στο $x_0=0$ έχουμε :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$$

γιατί $\left|x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|=\left|x^2\right|\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq\left|x^2\right|\cdot 1=\left|x^2\right|=x^2$

Άρα $-x^2\leq x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq x^2$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=0=\lim\limits_{x\to 0}x^2$ από το κριτήριο παρεμβολής

και $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$

Αφού η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ ισχύει :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0\Leftrightarrow\alpha=0$$

Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\dfrac{1}{\pi}\right]$

ii) Για κάθε $x \neq 0$ η $f(x) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2x\eta\mu\frac{1}{x} + x^2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$

Στο $x_0 = 0$ έχουμε :

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$

γιατί $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq |x|\cdot 1 = |x|$

Άρα $-|x| \leq x\eta\mu\frac{1}{x} \leq |x|$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right) = 0 = \lim\limits_{x\to 0}|x|$ από το κριτήριο παρεμβολής

και $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$

Άρα f ΄(0)=0

iii) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{1}{\pi}\right]$

Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0,\frac{1}{\pi}\right)$

$f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi^2}\eta\mu\pi = \frac{1}{\pi^2}\cdot 0 = 0 = f(0)$

οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $f(x)$ στο διάστημα $\left[0,\frac{1}{\pi}\right]$ υπάρχει $\xi \in \left(0,\frac{1}{\pi}\right)$ τέτοιο , ώστε :

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x\eta\mu\frac{1}{x} = \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$2x = \sigma\varphi\frac{1}{x}$$

2. Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν για την $g(x)=f(x)-\lambda x^2$ εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο διάστημα $[0,1]$, και ισχύει $f(0)=\alpha$ και $f(1)=\alpha+2$ να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ και να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$, ώστε f ΄(ξ) = 4ξ

Λύση

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,1)$ με $g'(x)=f'(x)-2\lambda x$

  Για να εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο διάστημα $[0,1]$, πρέπει
- $g(0)=g(1)\Leftrightarrow f(0)=f(1)-\lambda\Leftrightarrow \alpha=a+2-\lambda\Leftrightarrow\lambda=2$

Οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $[0,1]$ υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο , ώστε :

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$
$$f'(\xi)-4\xi=0\Leftrightarrow$$
$$f'(\xi)=4\xi$$

3. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται

ii) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ δεν είναι άρτια

iii) Αν $f(x)+f(4-x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$

Λύση

i) Έστω ότι η $f(x)$ δεν αντιστρέφεται. Τότε η $f(x)$ δεν είναι «1-1»
Άρα υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2) με $f'(x)\neq 0$
- $f(x_1)=f(x_2)=0$

οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $f(x)$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο , ώστε :

$$f'(\xi) = 0 \text{ άτοπο γιατί } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η $f(x)$ αντιστρέφεται

ii) Έστω ότι η $f(x)$ είναι άρτια . Τότε η $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Έστω $\alpha > 0$.

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\alpha, \alpha)$ με $f'(x) \neq 0$
- $f(-\alpha) = f(\alpha)$

οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $h(x)$ στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$ υπάρχει $\xi \in (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο , ώστε :

$$f'(\xi) = 0 \text{ άτοπο γιατί } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

iii) Θέτουμε στη σχέση $f(x) + f(4-x) = 0$ όπου x=2 και παίρνουμε
$f(2) + f(4-2) = 0 \Leftrightarrow 2f(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 0$
Άρα το x=2 είναι ρίζα της $f(x) = 0$ και αφού η $f(x)$ είναι «1-1» η x=2 είναι μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$

4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου $f(x)$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο , ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$

Λύση

Η $g(x) = e^x f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x \left(f(x) + f'(x) \right)$$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{3}{2}\right]$
- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ με $g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x \left(f(x) + f'(x) \right)$

- $g(0)=g\left(\frac{3}{2}\right)$

οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ τέτοιο , ώστε :

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$
$$e^{\xi}\left(f(\xi)+f'(\xi)\right)=0\Leftrightarrow$$
$$f(\xi)+f'(\xi)=0\Leftrightarrow$$
$$f'(\xi)=-f(\xi)$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+3x+\mu$, $\mu\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα (1,2).

<u>Λύση</u>

Έστω η εξίσωση $\frac{2x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+3x+\mu=0\Leftrightarrow f(x)=0$ έχει δυο ρίζες $x_1,x_2\in(1,2)$

Τότε $f(x_1)=0$ και $f(x_2)=0$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ σαν πολυωνυμική
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2) με $f'(x)=2x^2-7x+3$
- $f(x_1)=f(x_2)=0$

οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $f(x)$ στο διάστημα $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο , ώστε :

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow$$
$$2x^2-7x+3=0$$
$$\xi=3 \text{ ή } \xi=\frac{1}{2} \text{ άτοπο γιατί } \xi\in(x_1,x_2)\subseteq(1,2)$$

Άρα η εξίσωση $\frac{2x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+3x+\mu=0\Leftrightarrow f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(2,3)$

6. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ είναι «1-1»

ii) Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1) , να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-2004+f\left(x^2-8\right)\right)=-2$

Λύση

i) Έστω ότι η $f(x)$ δεν είναι «1-1»

Άρα υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[x_1,x_2\right]$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(x_1,x_2\right)$ με $f'(x)\neq 0$
- $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$

οπότε από το θεώρημα του Rolle για την $f(x)$ στο διάστημα $\left[x_1,x_2\right]$ υπάρχει $\xi\in\left(x_1,x_2\right)$ τέτοιο , ώστε :

$f'(\xi)=0$ άτοπο γιατί $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η $f(x)$ είναι «1-1»

ii) Αφού η C_f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1) ισχύουν: $f(1)=2005$ και $f(-2)=1$

Άρα $f^{-1}\left(-2004+f\left(x^2-8\right)\right)=-2$ οπότε

$$f\left(f^{-1}\left(-2004+f\left(x^2-8\right)\right)\right)=f\left(-2\right)\Leftrightarrow$$

$$-2004+f\left(x^2-8\right)=1\Leftrightarrow$$

$$f\left(x^2-8\right)=2005\Leftrightarrow$$

$$f\left(x^2-8\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow$$

$$x^2-8=1\Leftrightarrow$$

$$x^2=9\Leftrightarrow$$

$$x=3 \text{ ή } x=-3$$